数値計算を通してみるソリトン・カオス・乱流非線形偏微分方程式の世界 : 乱れた世界の見方(計算物理,第40回 物性若手夏の学校(1995年度),講義ノート)

藤, 定義

数値計算を通してみるソリトン・カオス・乱流
非線形偏微分方程式の世界—乱れた世界の見方

京大理・物理　藤　定義

世話人の方から、表題のような内容の初心者向けの講義をしてほしいとの要望を受けました。それぞれのテーマに対して数多くの本が出版されており、私自身もソリトンやカオスの専門家ではないので、一般論ではなく出来る限り例題を用いた実際的な内容の講義にしたいと思います。そこで、非線形偏微分方程式で記述されるような自由度の極めて大きい系、特に空間構造が問題となる場合に限らせていただきます。また、私がこれまで扱ってきた系を例題として話を進めたいと思います。

私たちが普段目にする風景（最近は静止衛星からの画像も含めて）は、（空間的に）乱れ（時間的に）不規則に変動しているのが普通です。しかし、この乱れや不規則性は一様ではなく、なにがしかの秩序を伴う場合が少なくありません。この様な現象をどう理解しまた記述するかは、勿論現象そのものにもよりますが、見る側の興味と能力に依存しています。ここでは、ソリトンに代表される局在構造に着目した見方を中心に話を進めます。さらに、乱流の基礎や実際の研究について、私が扱っている熱対流乱流を中心に解説します。

講義では、実際のシミュレーション結果のグラフやビデオを使って直観的に分かる話にしようと思っています。そこで、このノートには必要と思われる基礎的な事や話の筋を中心にまとめておきますので、分からないことは講義中に直接聞いてください。

ところで、ソリトンとカオスは非線形力学に従う系の振る舞いとしては相反するものです。前者は完全可積分性を、後者は予測不可能性をそれぞれ示しているからです。そもそもソリトンは、（衝突に対して）粒子的性質を持った孤立波であり、一般には厳密解によって時間発展が記述できます。つまり、非線形ノーマルモードとして系を記述する縮約された座標の役割を果たします。しかし、ソリトンは摂動に対して比較的安定で、全体としては不規則になっても粒子性は保っている場合もあります。乱れた系に対してもノーマルモードとしての役割を担う可能性があるわけです。さらに個性すら保てない場合にも、すなわち生成消滅を繰り返す場合にも、少なくとも第０近似として統計的な記述を可能にすることすらあります。この意味で、ここでは粒子的性質を持つ孤立波を広い意味のソリトンとみなし「パルス」と呼ぶことにします。

1.　ソリトン

非線形問題の最大の成果の一つは、ソリトンの発見と完全可積分性の証明でしょう。つまり、ソリトン方程式は、任意の初期条件に対し原理的にはその時間発展を解析的に記述できます。特に、複数個のソリトンに対しては一般に厳密解が構成できます。ここでは、数学的な構造より物理的な意味を以下の KdV 方程式を例に説明します。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{1}$$

KdV 方程式は長波近似の非線形波動方程式で、第二項が非線形項、第三項は分散項です。この形の非線形項は、波を突っ起たせる働きがあります。一方、分散項は単色波の位相速度が波数によることを示し、初期に単色波を重ね合わせて局在させても時間と共に’分散’してしまいます。ＫｄＶ方程式の場合、両効果が釣り合い孤立波が安定に存在できるわけです。

勿論、これは孤立波が可能であることを示しただけであり、可積分性を説明するものではありません。

ところで、多次元系でもソリトン解を持つ方程式は知られていますが、基本的には一次元ソリトンがベースになっている場合がほとんどです。すべての方向に指数関数的に減衰する局在したソリトンはまだ知られていません。この事は、先に述べた孤立波の釣り合いにおいて、進行方向と垂直な方向の分散と釣り合う効果がない事を考えると容易に理解できると思います。もし、そのような解があるとすると、空間の性質が一様ならば、初期条件として孤立波の位置と初期速度を指定しなければ成らず、かなり変わった方程式に従うことになるでしょう。

講義では、非線形シュレディンガー方程式やサインゴルドン方程式などのソリトン解にも触れたいと思います。また、可積分性の判定法であるパンルベテストについても説明するつもりです。

2. 孤立波

非線形波動方程式の定常（進行波）解として無限遠方で指数関数的に減衰している孤立波解を考えましょう。この場合偏微分方程式は、自由度の少ない連立常微分方程式に変換されます。このとき、孤立波はホモクリニック軌道に対応します。例として以下の方程式を考えます。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\delta(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})=0. \tag{2}$$

この方程式は、KdV 方程式に蔵本＝シバシンスキー（ＫＳ）方程式の線形項が加わったもので、$\delta \to 0$ の極限で KdV 方程式、$\delta \to \infty$ の極限でＫＳ方程式にそれぞれ移行します。この意味で、完全可積分系とカオス系を結ぶ方程式です。（ＫＳ方程式はカオス的振る舞いで有名です。）ここで、新しい変数$\xi = x - ct$ を導入します。ただし、c は孤立波の位相速度です。

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v,\\ \dot{v} &= w,\\ \dot{w} &= -v+(cu-\frac{1}{2}u^2-w)/\delta.\end{aligned} \tag{3}$$

ドットは空間 (ξ) 微分を表しますが、時間微分と読み換えると３自由度の力学系とみなせます。無限遠方で $u=\dot{u}=\ddot{u}=0$ の境界条件を満たす孤立波は、固定点 $(u,v,w)=(0,0,0)$ を結ぶホモクリニック軌道とみなせます。また、固定点の安定性から、孤立波の裾は単調減衰（増加）と振動減衰（増加）の両方が可能であることがわかります。KdV 方程式の場合 $(\delta=0)$ は、単調な裾しかないことは明らかでしょう。一般には、孤立波は数値的にしか求められません。普通は、シューティング法と呼ばれる手法を用いて求めます。興味深いのは、この３自由度の力学系がカオス解を持ちうるということです。これは、シルニコフの定理に基づくですが、定常進行波解がランダムな孤立波の列として書けることを表しています。ただし、この解が元の偏微分方程式による時間発展に対して安定かどうかは別問題です。

この様な孤立波（パルス）をノーマルモードと考え、その集団運動を記述する運動方程式を求めようとする試みがいくつかあります。これは、周期パターンの位相に着目した位相動

力学 (phase dynamics) のパルス系への拡張とも考えられます。完全な理論はまだありませんが、いくつかの方法を問題点と共に紹介したいと思います。

3. 多次元孤立波

1. で述べたように、局在した多次元ソリトン解はまだ知られていません。一方、現実の世界は多次元であり局在した現象も少なくありません。たとえば、地中を上昇するマグマが「マグマだまり」と呼ばれる固まりを作ることが知られていますが、これは多孔性物質や2相流体に共通の性質です。最近話題になっている粉体現象に見られるスラッグなども似た現象でしょう。もっと身近な例では、窓や道路を流れる水の表面に立つ馬蹄形をした波があります。この様な現象を記述するものとして以下の方程式が導出されました。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \triangle u}{\partial x} + \delta(\triangle u + \triangle^2 u) = 0. \tag{4}$$

この方程式のラプラシアン $(\triangle)$ を x 微分 $(\partial^2/\partial x^2)$ に置き換えると (2) 式になります。特に、$\delta = 0$ の場合、磁気プラズマ中のイオン音波を表す方程式となり、ザカロフ－クズネツォフ（ＺＫ）方程式と呼ばれています。ＺＫ方程式は、軸対称な孤立波解（パルス）を持ちます。１次元 KdV ソリトン解もこの方程式の解ですが、不安定で軸対称孤立波に分裂してしまいます。この軸対称孤立波は、衝突に対しても比較的安定でソリトン的に振る舞うのですが、残念ながらＺＫ方程式は可積分系ではありません。この方程式の特徴は、非線形項の形から分かるように特定の方向を持っていることです。この向きは、現象によりますが、重力や磁場などに由来します。

散逸項が加わると $(\delta \neq 0)$、孤立波の軸対称性が破れ、馬蹄形の振動が加わります。これが、先に述べた雨の日に道路や窓に見られる馬蹄形をした波の正体です。一見、１次元系と同じようにパルスダイナミクスが作れそうですが、多次元孤立波はホモクリニック軌道のような低次元力学系の言葉では表現できず、本質的に無限自由度系として取り扱わなければならないので、現状では不可能です。この意味でも、多次元系と１次元系の間の溝は深いようです。

4. カオス

決定論的な力学に従う（方程式で記述される）系が自発的な不規則性を生み出す時、これをカオスと呼びます。もちろん決定論に従うわけで原理的にはいつまでも解を追い続けることが出来るはずですが、どんなに小さくとも誤差が入れば指数関数的に増大し予測不可能となるわけです。散逸系では、解は位相空間のストレンジアトラクターと呼ばれるフラクタル的な領域に制限されてしまいます。これは、散逸効果により位相空間の体積が減少する一方、解の一意性を保ちながらいつまでも軌道不安定であるために必要な構造です。

解がこのアトラクターに制限されるとすると、エルゴート性が成り立ちます。つまり、時間平均がアンサンブル平均と同等であるわけです。ただし、ストレンジアトラクターの構造は極めて複雑ですので、位相空間での状態に対する分布を決めることは絶望的でしょう。

カオスかどうかの判定ですが、先の指数関数的な軌道不安定性を計る指数であるリャプノフ数を計算するのが一般的です。ただし、カオスが常識と化した現在では、リャプノフ数を求めることは特別な必要性がなければ蛇足かもしれません。

具体的には、リャプノフ数の大きい方向に（一般化）体積は引き延ばされる事を利用して、元になる非線形方程式とこの解に対して線形化したN個の方程式を連立して解き、適当な時間間隔でN個の解を直交化し規格化しながら増幅率を求め平均操作を行いリャプノフ数を求めます。つまり、軌道に沿ってその軌道の線形安定性を時々刻々と計算し、増幅率の平均を軌道に沿って求めるわけです。文献によっては、この時々刻々に求まる増幅率を局所リャプノフ数、またそれに対応する線形解をリャプノフベクトルと呼びます。講義では、例題を用いてより具体的な処方箋の説明をします。

リャプノフ数は統計的な量であり、ダイナミクスに対する情報は一般的には含まれていません。一方、カオスあるいは軌道不安定性の生成は位相空間において一様ではなく、引き延ばしを行う領域と折り畳みを行う領域が異なります。勿論、ここで問題にしているような高次元のアトラクターの構造は目で見て分かるわけではありません。しかし、局所リャプノフ数を調べると第一局所リャプノフ数すら大きさだけでなく符号さえも変化しますし、いくつかの局所リャプノフ数が交互に最大増幅率を取るようになります。つまり、局所リャプノフ数を調べることにより位相空間の非一様性を計ることが出来るわけです。くどいように説明しましたが、カオスや乱流の原因、特にダイナミカルな素過程を調べようとするときに強力な武器になります。

ここまで話は系の自由度によらないものですが、広い意味で空間的広がりがある場合カオス的な見方に新しい知見が必要になります。ところで、リャプノフ数やリャプノフベクトルを用いる解析をリャプノフ解析と呼びます。高次元系に適用した例をいくつか挙げると、

- 乱流：リャプノフスペクトルの相似性、中立モードとカスケードの関連、時間間欠性と局所リャプノフ数の関連

- 結合振動子系：巨視的秩序モードと孤立（特異）リャプノフ数の対応

など、現象の理解に直結した興味深い結果があります。また、リャプノフベクトルを調べることにより、実空間の特定の位置で起きる現象と軌道不安定性の関連が理解できることがあります。例えば、次に述べるＫＳ乱流ではパルスが消滅するときに強い軌道不安定性を生み出すことが示せます。

強いカオス（乱流）を表現する方法として、パワースペクトルや分布関数などを用いた統計的な見方があります。それぞれの統計量は、カオスごとに特徴ある構造を持っています。それぞれの特徴をより基本的な見方から説明することが試みられています。これらの研究は多岐に渡っていますが、ここでは局在構造に着目したＫＳ方程式と５次の非線形項を持つギンツブルグ＝ランダウ（ＱＧＬ）方程式の強いカオス解を扱った研究を説明します。

ＫＳ乱流のスペクトルは、低波数域の平坦部分と引き続く鋭いピークで特徴づけられます。一方、解の時間発展を見ると不規則に変動するパルス列のように見えます。ただし、これらのパルスは生成消滅を繰り返しています。従って、パルスのダイナミクスでは説明できませんが、パルスを用いた統計モデルによりスペクトルがうまく説明できます。

ＱＧＬ方程式は、散逸効果がない極限で有限時間で発散する解を持っています。この様な発散解を持つ系はそれほど特殊ではなく、例えば２次元非線形シュレジンガー方程式は自己相似的に発散する解を持ちますが、これは非線形光学における"フォーカシング"と呼ばれる自己収束に対応しています。この発散性は、ＱＧＬ方程式の発散解と同じ性質を持つことが知られています。この解（バースト）は、ソリトンやパルスとは違いますが、局在してい

るという点で素過程として似たような役割を担います。ＱＧＬ方程式は、散逸効果の強さに応じて３種類のカオス解を持ちます。それぞれのカオスは様々な統計量により分類されますが、特に分布関数の変化で特徴づけられます。この様なカオス（乱流）間遷移は、より現実的な乱流でも観測されていて、以下に述べる乱流の間欠性とも関連がある可能性があり興味深いものです。とくに、バーストが中心的役割を果たす強い乱流状態では、分布関数はベキ分布になるのですが、そのベキ則を説明するバーストを用いた統計モデルが構成できます。

これらの例が示すように、局在構造が乱流の統計を理解する上でも役立つ場合があります。最後に、流体現象に見られる乱流を物理的立場から説明をしたいと思います。

5. 乱流

私が流体研究を始めたころ、「乱流を定義出来れば、乱流は分かったことになる」と教えられました。恐らく、現在でも状況は変わっていないでしょう。従って、乱流研究者の数だけ乱流の見方があると言ってもおかしくないかもしれません。実際、流体の専門家と物性系の研究者の間の乱流観には大きな隔たりがあるようです。

流体乱流は我々の周りに普通に見られます。乱流は、分子粘性や拡散に比べけた違いのエネルギー散逸や拡散により特徴づけられます。様々な物質や熱が比較的速く拡散するのは乱流の利点ですが、交通機関の燃費を悪くするのも乱流で、その理解が重要であることは言うまでもないでしょう。工学的には、平均流と揺らぎ（乱流）に分け（この平均流の定義に曖昧さがあるのですが）、乱流の影響を平均流だけで表現しようと試みます。最も粗っぽいものは、いわゆる「乱流粘性」で乱流揺らぎを分子の熱運動と同じように考え粘性係数を桁違いに大きな値に置き換えるものです。この粘性係数の値は理論的に予測できませんし、現実のモデルとしては荒すぎることが知られています。最近の計算流体力学ではより現実的なモデルを考案し、それに基づくシミュレーションが盛んに行われています。しかし、これらのモデルもどちらかというと発見法的な手法に依存しており、乱流の性質の理解の上に成り立つものではないようです。

より基礎的な立場に立ち、乱流揺らぎの性質を理解しようとする研究も数多くなされてきました。それらの研究は、平均流を持たないいわゆる「一様等方乱流」を対象したものです。乱流の性質を表すものとして「カスケード」という用語を聞いたことがあると思います。これは乱流のエネルギー散逸のモデルを説明するためにコルモゴロフにより導入されたもので、大きな渦が壊れて小さな渦に分裂し、さらに小さな渦へ分裂するという自己相似的な過程を経て大きなスケールから小さなスケールにエネルギーが運ばれることを意味します。簡単な次元解析からエネルギースペクトルが$k^{-5/3}$になることが示せますので、5/3乗則とかＫ４１（コルモゴロフの１９４１年の理論）などと呼ばれます。この事からも分かるように、乱流の研究は「カスケード過程の研究」であったと言えます。この研究を通じてフラクタルをはじめとして様々な概念が物理に導入されてきました。

カスケードは常識になりましたが、具体的にどのような現象に基づくのか、は誰も知りません。最近、コンピューターが発達し、直接ナビエ＝ストークス方程式を解くことで視覚的定量的に乱流を観察することが出来るようになりましたが、複雑すぎてどう表現していいのか、あるいは何に着目していいのかという点でも解決策が見いだされていないのが現状でしょう。

講義では、私が現在研究している熱対流乱流のシミュレーション結果を基に、乱流の基礎を説明したいと思います。また、カスケード過程を手軽に調べることが出来る、簡単なモデ

ル– シェルモデル（ＧＯＹモデル)–を紹介したいと思います。このモデルを使うと乱流をカオス的な視点から研究することが出来ます。また、カスケードのような空間とスケールの情報を同時に扱えるウェーブレットを用いた研究にも触れたいと思います。

6. 数値スキーム

偏微分方程式を数値的に解く場合、空間方向の取り扱いが問題となります。大まかに言って普通差分法かスペクトル法のどちらかを使います。ここでは、狭義のスペクトル法について K-S や KdV 方程式ぐらいは解ける程度の手法を説明したいと思います。スペクトル法は差分法に比べると精度が極めて高いのが特徴ですが、その性質上展開する直交関数系に強く依存しており、境界条件や空間領域の形に制限を受けます。また、スキームの構造が複雑になりお手軽ではない面もあります。

スペクトル法を用いたスキームを使うときに注意しなければいけないのは非線形項の扱いです。２次の非線形項の場合、この項の直接計算には N^2のオーダーの演算が必要になります。そこで、積を計算する前にそれぞれの場を実空間に変換しその後に積を計算し、スペクトル空間に戻す操作をすると演算数は $N\log N$のオーダーに減らすことが出来ます。この操作で非線形項を計算するとき、「擬スペクトル法」と呼びます。最近のコンピューターの能力ならば、１次元程度では問題にならないかもしれませんが、２次元３次元と空間次元が上がるとその効果は絶大です。ただし、擬スペクトル法には有限個のモード（自由度の打ち切り）を用いることに由来する誤差ーエイリアジング誤差ーが含まれます。これは、扇風機の羽根の回転がゆっくり逆回転しているように見えるのと同じ原因の誤差です。具体的な取り除き方は、時間方向のスキームと共に講義の時に詳しく説明します。